# Kartkówka 1.03.2018

**Zadanie 1.** Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int (\cos x)^3 \,\mathrm{d}x.$$

Co oznacza $+C$ na końcu podanego wyniku?

---

Dodanie stałej na końcu wyniku sygnalizuje, że całka nieoznaczona nie jest jedną funkcją, ale całą rodziną funkcji (różniących się o stałą).

Sposób I. Podstawiamy $y = \sin x$, $\mathrm{d}y = \cos x \,\mathrm{d}x$, oraz korzystamy z jedynki trygonometrycznej:

$$\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \,\mathrm{d}x = \int (1 - y^2) \,\mathrm{d}y = y - \frac{y^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Sposób II. Korzystamy najpierw z jedynki trygonometrycznej:

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \,\mathrm{d}x &= \int (1 - \sin^2 x) \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= \sin x - \int \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

następnie całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x &= \int (\sin x)' \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\ &= \sin^3 x - \int \sin x \cdot 2 \sin x \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= \sin^3 x - 2 \int \sin^2 x \cos x. \end{aligned}$$

Rozwiązują równanie liniowe, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x &= \frac{\sin^3 x}{3} + C, \\ \int \cos^3 x \,\mathrm{d}x &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Dla pełnej poprawności należy dodać, że wszystkie powyższe funkcje są ciągłe, co uzasadnia istnienie całek nieoznaczonych, których użyliśmy.

**Zadanie 2.** Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Proszę podać definicję całki oznaczonej (Newtona) funkcji $f$ na przedziale $[a,b]$ (oznaczanej $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$). Uzasadnić poprawność definicji (to znaczy jej niezależność od wyboru obiektów pomocniczych).

---

Skoro $f$ jest funkcją ciągłą, to posiada *jakąś* funkcję pierwotną $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, co pozwala zdefiniować całkę na przedziale $[a,b]$ jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Jeśli $\overline{F}$ jest *jakąkolwiek inną* funkcją pierwotną $f$, to

$$(\overline{F} - F)' = f - f = 0,$$

a więc $\overline{F} - F$ jest funkcją stałą na przedziale $[a,b]$. Jeśli oznaczymy ją przez $c \in \mathbb{R}$, to użycie $\overline{F}$ w definicji całki dałoby

$$\overline{F}(b) - \overline{F}(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a),$$

co uzasadnia poprawność definicji (czyli jej niezależność od wyboru konkretnej funkcji pierwotnej).